

تعريف:

المتناظر المستمر

نطلق على التطبيق  $(x, y) \rightarrow (y, x)$   $f$   $f$  تناظر طوبولوجي مستمر إذا كان تناظرا مستمرا وهو معكوس

 $f$  تناظر (عاصر ومتابن) $f$  مستمر

ثم: مستمر

\* نقول عن فضائين طوبولوجيين  $X$  و  $Y$  متماثلين إذا وجد بينهما التماثل المستمر (واحد على الأقل)

١٣

\* التطبيقات المفتوحة والمغلقة:

لاحظنا خلال دراستنا للاستمرار ان الحديث يجري دوماً عن الصورة المباشرة

بالنسبة لهذه الصورة المباشرة نعرف الآن:

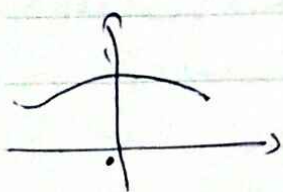
- نقول عن التطبيق  $f: X \rightarrow Y$  من فضاء طوبولوجي  $X$  الى فضاء طوبولوجي  $Y$  انه مفتوح

إذا كانت الصورة المباشرة وفقه لأي مجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة

ونقول عن التطبيق  $f$  انه مغلق إذا كانت الصورة المباشرة وفقه لأي مجموعة

مغلقة هي مجموعة مغلقة.

\* مثال ١:



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

لأخذ التطبيق نأخذ الدالة

$$y = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

هذا التطبيق مستمر ولكنه ليس مفتوحاً وليس مغلقاً

الحل:

نبر الدالة  $[0, 1]$ 

$$f(\mathbb{R}) = ]0, 1]$$

 $\mathbb{R}$  مفتوح بينما  $f(\mathbb{R})$  صورته المباشرة غير مفتوحة  $f$  مغلقة وهو نتنا المباشرة

مغلقة

\* مثال ٢:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

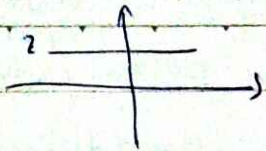
لأخذ التطبيق



Date : / /



Subject: .....



و نأخذ الدالة المعرفة بالشكل الآتي:

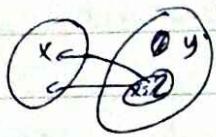
$$y = f(x) = 2$$

الكل:

نشر من أن  $u$  مجموعة مفتوحة في المستقر هناك احصا لان

$$R = f^{-1}(u) \quad \text{الأول} \quad x = 2 \in u \quad \text{عندها الصورة العكسية لـ } u \text{ نقول:}$$

$$\emptyset = f^{-1}(u) \quad \text{الثاني} \quad x = 2 \notin u \quad \text{عندها الصورة العكسية لـ } u \text{ نقول:}$$

وبالتالي هذا التطبيق مستمر وهو مغلقة لأن  $A$  مجموعةمغلقة في المطالبات  $R$  فإن:  $f(A) = \{2\}$  وهي مجموعة وحيدةالنظر ومجموعة وحيدة النظر مغلقة في  $R$ ولواخذنا أي مجموعة مفتوحة في  $R$  ولتكن  $G$ ,  $f(G) = \{2\}$  والمجموعة وحيدة

النظر هي مجموعة غير صفوحة

برهنة:

ليكن  $f: X \rightarrow Y$  قابلا بين الفضاء  $X$  والفضاء  $Y$  ان الفضاءا

التالي متكافئة:

1.  $f$  هو مستمر2.  $f$  مستمر ومفتوح3.  $f$  مستمر ومغلقةالشرط الأول يعني أن:  $f$  مستمر و  $f$  مستمرالشرط الثاني يعني أن:  $f$  مستمر و  $f$  مفتوحالشرط الثالث يعني أن:  $f$  مستمر و  $f$  مغلقة

البرهان

حيث  $f^{-1}$  مستمر  $\Leftrightarrow f$  مفتوح  $\Leftrightarrow f$  مغلقةوإن  $X \rightarrow Y: f^{-1}$  مستمرلتكن  $u$  مجموعة مفتوحة في  $X$  وبما أن  $f^{-1}$  مستمر فالصورة العكسية وفقة هي

$$f^{-1}(f^{-1}(u)) = u$$

$$f^{-1}(f^{-1}(u)) = f^{-1}(u) \quad \text{ولتكن}$$

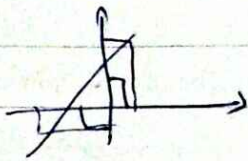
و يمرر نفس الشر بالأسية للمجموعة مغلقة

برهان





مثال :



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

لنأخذ التطبيع

ولنأخذ الدالة الممرمة بالشكل:  $y = 2x + 3$ -  $f$  هو مورفزم لأن  $f$  تقابل وهو مستمر (لأن الدالة خطية)و  $f$  مستمر لأن الدالة العكسية للدالة المعطاة مستمر  $x = \frac{y-3}{2} = \frac{y}{2} - \frac{3}{2}$ وإن  $f$  مغلقة ومفتوح ستونه هو مورفزم

$$f^{-1}([a, b]) = [a-3, b-3] \\ = [\frac{a-3}{2}, \frac{b-3}{2}]$$

الدالة العكسية لمجال مفتوح هي مجال مفتوح وبالتالي التطبيع ~~مفتوح~~

نعم :

لنقرض أن  $f: X \rightarrow Y$  هو مورفزم أثبت أن الصورة المباشرةأي جوار للنقطة  $x$  (نقطة سميكة من  $x$ ) هو جوار للنقطة  $f(x)$ .حيث  $U$  جوار سمي  $x$  فإن  $f(U)$  جوار  $f(x)$ 

البرهان :

بما أن  $U$  جوار فكل تعريف الجوار يوجد مجموعة مفتوحة  $V$  بحيث  $x \in V \subseteq U$ 

$$f(x) \in f(V) \subseteq f(U)$$

سواء  $f$  مفتوح فالمجموعة  $f(V)$  مجموعة مفتوحة في  $Y$  وهذا يعني أن  $f(U)$  جوار

مرحلة :

يكون التطبيع  $f: X \rightarrow Y$  مغلقة إذا وفقط إذا تحققت العلامة الأتية

$$f(\bar{A}) \supseteq \overline{f(A)}$$

من أجل أي مجموعة جزئية  $A \subseteq X$ 

البرهان :

نقرض أن  $f$  مغلقة ولنأخذ مجموعة سميكة  $A$  من  $X$  لدينا دوماً :

$$f(A) \supseteq \overline{f(A)} \iff A \supseteq \overline{A}$$

$$f(\bar{A}) \supseteq \overline{f(A)}$$

بما أن الصلة  $\bar{A}$  مجموعة مغلقة و  $f$  تطبيع مغلقة فالمجموعة  $f(\bar{A})$ 

$$f(\bar{A}) \supseteq \overline{f(A)}$$

 $\Rightarrow$  نقرض أن العلاقة وسنثبت أن التطبيع مغلقة

Date :     /     /



Subject: .....

وهي تتركز على مغلقة يجب أخذ مجموعة مغلقة ومنه ان صورتها المباشرة مغلقة  
 لتأخذ مجموعة  $A$  مغلقة وسكونها مغلقة فإن  $A = \bar{A}$   
 ومنه  $f(A) = f(\bar{A}) \supseteq \overline{f(A)}$  ومنه العكس  $f(A) = f(\bar{A})$   
 $f(A)$  مغلقة وبالتالي فهي لصاقتها وبالتالي التطبيق مغلقة  
 برهان:

يكون التطبيق  $f: X \rightarrow Y$  مفتوحاً اذا وفقط اذا تحقق الشرط التالي:  
 $f(A^\circ) \subseteq f(A)^\circ$  من اجل اي  $A$  من  $X$

البرهان:

$\Leftarrow$   $f$  مفتوح وليكن  $A$   $x \in A$  ولدينا دوماً  $A \supseteq A^\circ$   
 ومنه  $(f(A))^\circ \supseteq (f(A^\circ))^\circ \Leftarrow f(A) \supseteq f(A^\circ)$   
 $= f(A^\circ)$

$\Leftarrow$  تأخذ مجموعة مفتوحة فيكون  $f(A) = f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ$   
 وبالتالي التطبيق مفتوح